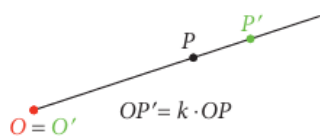


KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

ELMÉLET

A középpontos nagyítás és kicsinyítés összefoglaló neve egy geometriai transzformáció, a **középpontos hasonlóság**.



Definíció: Adott egy O pont (a **középpontos hasonlóság középpontja**) és egy k pozitív valós szám (a **hasonlóság aránya**).

A tér bármely P pontjához hozzárendeljük a P' pontot úgy, hogy

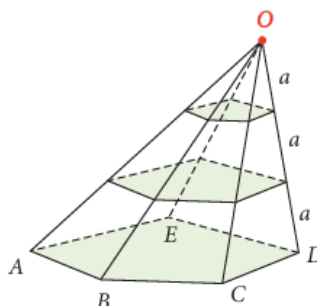
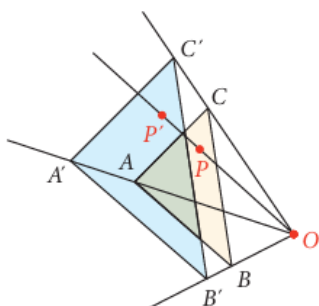
- az O pont képe önmaga (azaz $O = O'$);
- ha $P \neq O$, akkor P' az OP félegyenesének azon pontja, melyre igaz, hogy az OP' szakasz hossza az OP szakasz hosszának k -szorosa.

Ez a hozzárendelés **középpontos nagyítás**, ha $1 < k$, **középpontos kicsinyítés**, ha $k < 1$, egybevágósági transzformáció, ha $k = 1$.

Szokás a középpontos hasonlóságot negatív k -ra is értelmezni, ekkor a transzformáció a $|k|$ arányú, O középpontú középpontos hasonlóság és egy O középpontú tükrözés egymásutánja.

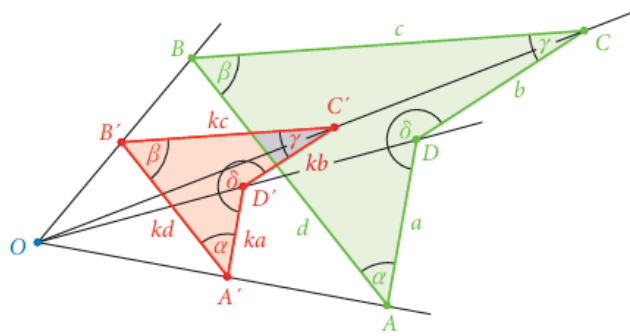
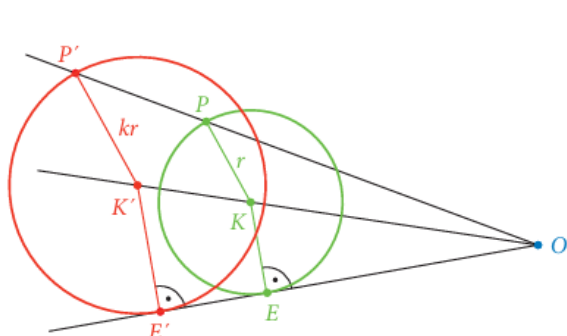
Definíció: Ha két alakzathoz van olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a alakzatokat középpontosan hasonlóknak mondjuk.

Például az ABC háromszög középpontosan hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz; az $ABCDEO$ gúlához középpontosan hasonló a másik két, szintén O csúcsú gúla (amelyeknek az alaplapja párhuzamos az $ABCDE$ lappal).



Az O középpontú, k arányszámú középpontos hasonlóság esetén:

- pont képe pont;
- egyenes képe egyenes, a kapott egyenes egybeesik az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes illeszkedik az O pontra, párhuzamos az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes nem illeszkedik az O pontra;
- szög képe vele egyenlő nagyságú szög;
- szakasz képe k -szor olyan hosszú szakasz, mint az eredeti szakasz.



A középpontos hasonlóság további fontos tulajdonságai:

- kör képe kör, melynek sugara az eredeti sugár k -szorosa;
- sokszög képe sokszög, e két sokszög megfelelő szögei egyenlők, megfelelő oldalai párhuzamosak (a pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos), megfelelő oldalaik hosszának aránya k -val egyenlő.

FELADATOK

1. Igaz-e, hogy bármely két nem egybevágó

a) négyzet;	c) egy síkban fekvő kör;
b) kocka;	d) gömb

középpontosan hasonló?

Megoldás:

Elméleti háttér:

Két alakzat **középpontosan hasonló**, ha létezik egy olyan középpontos hasonlósági transzformáció (egy O középpont és egy $\lambda \neq 0$ arányszám), amely az egyik alakzatot a másikba viszi.

Ez azt jelenti, hogy az alakzatok megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy pontban (O) metszik egymást, és a középponttól mért távolságok aránya állandó (λ).

a) Bármely két nem egybevágó négyzet középpontosan hasonló?

Válasz: **NEM.**

- Magyarázat:** Bár bármely két négyzet *hasonló* egymáshoz (az oldalaik aránya megegyezik, a szögeik 90° -osak), **középpontosan** nem feltétlenül hasonlóak. Ahhoz, hogy két négyzet középpontosan hasonló legyen, a megfelelő oldalaiknak párhuzamosaknak kell lenniük. Ha az egyik négyzetet elforgatjuk a másikhoz képest (például 45° -kal), akkor a megfelelő oldalaik már nem lesznek párhuzamosak, így nem létezik olyan középpont, amelyből vetítve egymásba lennének vihetők.

b) Bármely két nem egybevágó kocka középpontosan hasonló?

Válasz: **NEM.**

- Magyarázat:** A helyzet teljesen megegyezik a négyzeteknél látottakkal, csak a háromdimenziós térben. Bár minden kocka hasonló egymáshoz, ha az egyik kocka el van forgatva a másikhoz képest a térben, akkor a lapjaik és éleik nem lesznek párhuzamosak, így középpontos hasonlósággal nem vihetők át egymásba.

c) Bármely két nem egybevágó, egy síkban fekvő kör középpontosan hasonló?

Válasz: **IGEN.**

- Magyarázat:** Bármely két különböző sugarú körhöz megadható középpontos hasonlóság. Sőt, pontosan két ilyen középpont is létezik:
 - Külső hasonlósági pont:** A két kör közös külső érintőinek metszéspontja (ha a kisebb kör nem a nagyobb belsejében van koncentrikusan). ebből a pontból kicsinyítve/nagyítva az egyik kör a másikba megy át.
 - Belső hasonlósági pont:** A közös belső érintők metszéspontja, vagy a középpontokat összekötő szakaszt a sugarak arányában osztó pont.
 - Kivétel (koncentrikus körök):* Ha a két kör középpontja egybeesik, akkor a közös középpont lesz a középpontos hasonlóság centruma (a hasonlósági arány pedig a sugarak aránya). Mivel minden esetben találhatunk ilyen pontot, az állítás **igaz**.

d) Bármely két nem egybevágó gömb középpontosan hasonló?

Válasz: **IGEN.**

- Magyarázat:** A körökhöz hasonlóan, a térben bármely két különböző sugarú gömb középpontosan hasonló egymáshoz. A gömbök középpontjait összekötő egyenesen mindig kijelölhető olyan külső és belső hasonlósági pont (centrum), amelyből az egyik gömb középpontos nagyítással vagy kicsinyítéssel a másik gömbbe vihető. Koncentrikus gömbök esetén a közös középpont a hasonlóság középpontja.

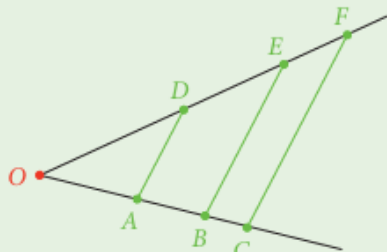
2 Az O csúcsú szög szárait párhuzamosokkal metszettük. Két-két keletkezett síkidomról azt állítjuk, hogy középpontosan hasonló. Melyik állítás igaz, melyik hamis, és miért?

a) az OAD háromszög és OBE háromszög;

b) az OCF háromszög és OBD háromszög;

c) az $ABED$ trapéz és $BCFE$ trapéz;

d) az $ABED$ trapéz és $ACFD$ trapéz.



Megoldás:

Elméleti háttér:

Két síkidom akkor és csak akkor **középpontosan hasonló**, ha létezik egy olyan O' középpont és egy $\lambda \neq 0$ arányszám, amely az egyik idom minden pontját a másik idom megfelelő pontjába viszi úgy, hogy a megfelelő szakaszok egymással párhuzamosak maradnak, és a pontok az O' pontból induló egyeneseken fekszenek.

Egy O középpontú és λ arányú középpontos hasonlóság fő tulajdonságai:

1. **Iránytartó:** Bármely egyenes képe egy vele párhuzamos egyenes lesz.
2. **Illeszkedéstartó:** Ha egy pont egy egyenesen van, akkor a képe is a kép-egyenesen lesz.
3. **Centrum:** Ha két szakasz párhuzamos és egyirányú, akkor a végpontjaikat összekötő egyenesek egy pontban (a transzformáció középpontjában) metszik egymást.

a) Az OAD háromszög és OBE háromszög középpontosan hasonlóak?

Válasz: IGAZ

- **Magyarázat:** Tekintsük az OAD és OBE háromszögeket. Az O csúcsnál lévő szögük közös. Mivel $AD \parallel BE$, az egyállású szögek egyenlősége miatt $\angle OAD = \angle OBE$ és $\angle ODA = \angle OEB$. A háromszögek szögei megegyeznek, így a két háromszög hasonló.
- Mivel a megfelelő oldalaik párhuzamosak ($AD \parallel BE$, az OA és OB egy egyenesen van, valamint az OD és OE is egy egyenesen van), a hasonlóság középpontja pontosan az O pont.

b) Az OCF háromszög és OBD háromszög középpontosan hasonlóak?

Válasz: HAMIS

- **Magyarázat:** A középpontos hasonlóság egyik legfontosabb alaptulajdonsága, hogy minden egyenes képe egy vele párhuzamos egyenes. Ha a két háromszög középpontosan hasonló lenne (a közös O csúcs miatt csak O centrummal), akkor a megfelelő oldalaiknak párhuzamosnak kellene lenniük.
- Azonban az OCF háromszög CF oldala és az OBD háromszög BD oldala nem párhuzamosak egymással. Ezért nem létezik ilyen középpontos transzformáció.

c) Az $ABED$ trapéz és $BCFE$ trapéz középpontosan hasonlóak?

Válasz: HAMIS

- **Magyarázat:** Ha a két trapéz középpontosan hasonló lenne, akkor a megfelelő csúcsokat összekötő egyeneseknek egyetlen pontban kellene találkozniuk.
- Az oldalsó szárak egyenesei (AB és DE) ugyan metszik egymást az O pontban, de a trapézok alapjait tartalmazó egyenesek (AD , BE , CF) a feladat szövege szerint mind párhuzamosak egymással. Párhuzamos egyenesek sosem metszhetik egymást egy közös pontban, így a transzformációnak nem létezik középpontja.

d) Az ABED trapéz és ACFD trapéz középpontosan hasonlóak?

Válasz: HAMIS

- **Magyarázat:** Az indoklás megegyezik a c) pontban leírtakkal. Mivel a trapézok alapjai (AD, BE, CF) párhuzamosak, nem tudnak egy közös pontból (centrumból) kiindulni.
- Emellett a két alakzatnak van egy közös oldala (az AD szakasz). Középpontos hasonlóságnál ha egy szakasz képe önmaga lenne, akkor a nagyítási arány csak $\lambda = 1$ (azaz egybevágóság) lehetne, viszont a két trapéz láthatóan nem egybevágó.

3 Nagyíts középpontosan egy négyzetet, a nagyítás aránya legyen 2! Mennyi a nagyított és az eredeti négyzet kerületének aránya, és mennyi a területük aránya?

Megoldás:

Legyen az eredeti négyzet oldala a , a középpontos hasonlóság (nagyítás) aránya pedig $\lambda = 2$. Ez azt jelenti, hogy a nagyított négyzet oldala $a' = 2a$ lesz.

A kerületek aránya

- Az eredeti négyzet kerülete: $K = 4a$
- A nagyított négyzet kerülete: $K' = 4a' = 4 \cdot (2a) = 8a$

A két kerület aránya:

$$\frac{K'}{K} = \frac{8a}{4a} = 2$$

$$K' : K = 2 : 1$$

Összefüggés: Hasonló síkidomok kerületének aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

$$\frac{K'}{K} = \lambda$$

A területek aránya

- Az eredeti négyzet területe: $T = a^2$
- A nagyított négyzet területe: $T' = (a')^2 = (2a)^2 = 4a^2$

A két terület aránya:

$$\frac{T'}{T} = \frac{4a^2}{a^2} = 4$$

$$T' : T = 4 : 1$$

Összefüggés: Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével.

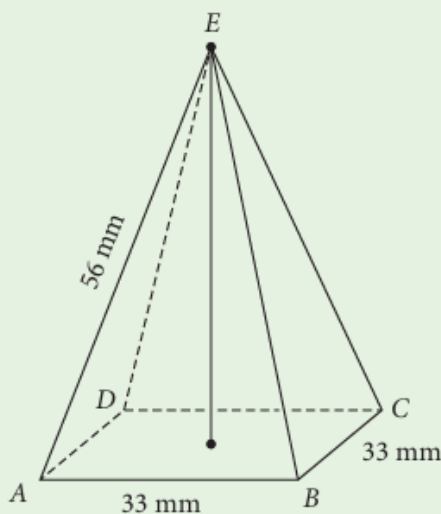
$$\frac{T'}{T} = \lambda^2$$

4. Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúlát középpontos hasonlósággal nagyítjuk az E pontból. A nagyítás aránya

a) 2; c) 100;

b) 8; d) $\sqrt{2}$.

Mekkora a nagyított gúlák alapélei és oldalélei? Mekkora a nagyított gúlák alapterülete? Mekkora a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete?



Megoldás:

- Alapél (a): 33 mm
- Oldalél (b): 56 mm

Mekkora a nagyított gúlák alapélei és oldalélei?

Középpontos hasonlóságnál a hosszak a nagyítási aránnyal (λ) szorozódnak:

Új alapél: $a' = a \cdot \lambda$

Új oldalél $b' = b \cdot \lambda$

a) $\lambda = 2$

$$a' = a \cdot \lambda = 33 \cdot 2 = 66 \text{ mm}$$

$$b' = b \cdot \lambda = 56 \cdot 2 = 112 \text{ mm}$$

b) $\lambda = 8$

$$a' = a \cdot \lambda = 33 \cdot 8 = 264 \text{ mm}$$

$$b' = b \cdot \lambda = 56 \cdot 8 = 448 \text{ mm}$$

c) $\lambda = 100$

$$a' = a \cdot \lambda = 33 \cdot 100 = 3300 \text{ mm (3,3 m)}$$

$$b' = b \cdot \lambda = 56 \cdot 100 = 5600 \text{ mm (5,6 m)}$$

d) $\lambda = \sqrt{2}$

$$a' = a \cdot \lambda = 33 \cdot \sqrt{2} \approx 46,67 \text{ mm}$$

$$b' = b \cdot \lambda = 56 \cdot \sqrt{2} \approx 79,2 \text{ mm}$$

Mekkora a nagyított gúlák alapterülete?

A gúla alapja egy négyzet, amelynek területe: $T_{\text{alap}} = a^2 = (33 \text{ mm})^2 = 1089 \text{ mm}^2$

Középpontosan hasonló síkidomoknál a terület a hasonlóság arányának négyzetével szorozódik: $T' = T_{\text{alap}} \cdot \lambda^2$

a) $\lambda = 2$

$$T' = T \cdot \lambda^2 = 1089 \cdot 2^2 = 1089 \cdot 4 = 4356 \text{ mm}^2$$

b) $\lambda = 8$

$$T' = T \cdot \lambda^2 = 1089 \cdot 8^2 = 1089 \cdot 64 = 69696 \text{ mm}^2$$

c) $\lambda = 100$

$$T' = T \cdot \lambda^2 = 1089 \cdot 100^2 = 1089 \cdot 10000 = 10.890.000 \text{ mm}^2 (1,089 \text{ m}^2)$$

d) $\lambda = \sqrt{2}$

$$T' = T \cdot \lambda^2 = 1089 \cdot (\sqrt{2})^2 = 1089 \cdot 2 = 2178 \text{ mm}^2$$

Mekkora a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete?

A gúla egy oldallapja egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a gúla alapéle (a), két szára pedig a gúla két oldaléle (b).

Az eredeti oldallap kerülete: $K = a + 2b = 33 + 2 \cdot 56 = 33 + 112 = 145 \text{ mm}$

Mivel a kerület egy lineáris (hosszúságjellegű) méret, a nagyítási aránnyal (λ) egyenesen arányosan változik:

Új kerület: $K' = K \cdot \lambda$

a) $\lambda = 2$

$$K' = K \cdot \lambda = 145 \cdot 2 = 290 \text{ mm}$$

c) $\lambda = 100$

$$K' = K \cdot \lambda = 145 \cdot 100 = 14500 \text{ mm}$$

b) $\lambda = 8$

$$K' = K \cdot \lambda = 145 \cdot 8 = 1160 \text{ mm}$$

d) $\lambda = \sqrt{2}$

$$K' = K \cdot \lambda = 145 \cdot \sqrt{2} \approx 205,06 \text{ mm}$$

5. Folytasd az előző feladatot! Számítsd ki, hány-szorosa a nagyított gúlák alapterülete az ABCD négyzet területének! Hányszorosa a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete az ABE oldallap kerületének?

Megoldás:

Ha egy alakzatot λ -szorosára nagyítunk, akkor:

- Minden hosszúságméret (élhossz, kerület, magasság) az eredeti λ -szorosára változik.
- Minden területméret (alapterület, oldallap területe, felszín) az eredeti λ^2 -szeresére változik.

Hányszorosa a nagyított gúlák alapterülete az ABCD négyzet területének?

Mivel a terület a nagyítási arány négyzetével (λ^2) arányosan változik, a keresett szorzószám minden esetben pontosan λ^2 lesz.

a) $\lambda = 2$

$$\lambda^2 = 2^2 = 4\text{-szerese}$$

c) $\lambda = 100$

$$\lambda^2 = 100^2 = 10.000\text{-szerese}$$

b) $\lambda = 8$

$$\lambda^2 = 8^2 = 64\text{-szerese}$$

d) $\lambda = \sqrt{2}$

$$\lambda^2 = (\sqrt{2})^2 = 2\text{-szerese}$$

Hányszorosa a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete az ABE oldallap kerületének?

Mivel a kerület egy lineáris hosszúságméret, a változás mértéke pontosan megegyezik magával a nagyítási aránnyal (λ).

a) $\lambda = 2$ esetén **2-szerese**

b) $\lambda = 8$ esetén **8-szorosa**

c) $\lambda = 100$ esetén **100-szorosa**

d) $\lambda = \sqrt{2}$ esetén **$\sqrt{2}$ -szerese**

3 Egy gömb sugara 6 cm. Kicsinyítjük a gömböt úgy, hogy a hasonlóság aránya 0,5 legyen. Számold ki a kicsinyített és az eredeti gömb felszínét és térfogatát, majd határozd meg a felszínek arányát és a térfogatok arányát is! (A gömb felszínét az $A = 4\pi r^2$ képlettel, térfogatát a $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ képlettel számolhatod ki.)

Megoldás:

- Eredeti gömb:
 - Sugár (r) = 6 cm
- Kicsinyített gömb:
 - Hasonlóság aránya: $\lambda = 0,5$
 - Új sugár: $r' = r \cdot \lambda = 6 \cdot 0,5 = 3$ cm

A feladatban megadott képletekkel fogunk számolni (a választ megadhatjuk pontos értékként π -vel kifejezve, vagy kerekített tizedestörteként is).

A felszínek kiszámítása és aránya

A gömb felszínképlete: $A = 4\pi \cdot r^2$

- Eredeti gömb felszíne (A):
 $A = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 4 \cdot \pi \cdot 36 = 144\pi \approx 452,39 \text{ cm}^2$
- Kicsinyített gömb felszíne (A'):
 $A' = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36\pi \approx 113,10 \text{ cm}^2$
- A felszínek aránya:
 $\frac{A'}{A} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ez éppen a hasonlósági arány négyzete.

A térfogatok kiszámítása és aránya

A gömb térfogatképlete: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

- Eredeti gömb térfogata (V):
 $V = \frac{4\pi}{3} \cdot 6^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 216 = 4\pi \cdot 72 = 288\pi \approx 904,78 \text{ cm}^3$
- Kicsinyített gömb térfogata (V'):
 $V' = \frac{4\pi}{3} \cdot 3^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 27 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi \approx 113,10 \text{ cm}^3$
- A térfogatok aránya:
 $\frac{V'}{V} = \frac{36\pi}{288\pi} = \frac{36}{288} = \frac{1}{8} = 0,125$

Ez éppen a hasonlósági arány köbe.